

Guía didáctica

Puntos que explotan

(Exploding Dots™)

Experiencia 6:

Todas las bases, y todas a la vez: los polinomios

Visión general 2 **La división en cualquier base** 3 **Material A:** *La división en cualquier base* 6 **Soluciones a las preguntas de «Material A»** 8 **¡Problema!** 9 **Solución** 10 **Material B:** *Problema y solución* 13 **Soluciones a las preguntas de «Material B»** 15 **Material C:** *Exploraciones brutales* 15

Recursos relacionados:

- Podéis acceder a los vídeos de *Puntos que explotan* (Exploding Dots™) aquí: <https://globalmathproject.org/exploding-dots/>
- Es recomendable repasar la guía *Getting Started*.
- Encontraréis material imprimible para el alumno sobre esta experiencia.



© 2017 James Tanton. Reservados algunos derechos. gdaymath.com

Esta obra tiene una licencia de [Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Unported License \(CC BY-NC-SA 3.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/)

Guía didáctica. Puntos que explotan Experiencia 6: Todas las bases, y todas a la vez: los polinomios

Experiencia 6: Todas las bases, y todas a la vez: los polinomios
Visión general

Objetivos del alumno

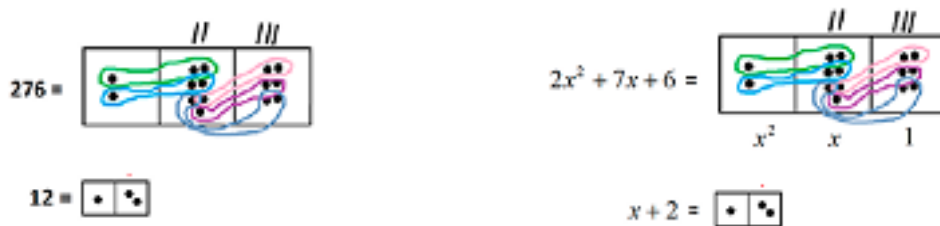
Todo lo que hemos hecho en las lecciones anteriores se puede hacer en cualquier base: las matemáticas no prefieren la base diez por encima de cualquier otra. Trabajando con cualquier base, x , obtenemos el álgebra de los polinomios, que se considera una extensión natural de la aritmética en base diez.

Breve resumen de la experiencia

Los humanos tenemos predilección por la base diez, ¡pero las matemáticas no! Todo lo que hemos hecho en las lecciones anteriores se puede hacer en cualquier base.

¡Seamos atrevidos y trabajemos con todas las bases a la vez! Trabajemos con una máquina $1 \leftarrow x$, donde x es un valor cualquiera al que podremos asignarle el diez, el dos o el valor de base que queramos.

Los objetos de una máquina $1 \leftarrow x$ se denominan *polinomios*, y el álgebra de los polinomios es, en realidad, una repetición de la aritmética en base diez. Por ejemplo, fijaos en esta operación aritmética de primaria, $276 \div 12$, y en esta operación de álgebra de secundaria, $(2x^2 + 7x + 6) \div (x + 2)$. Vemos que son idénticas, con las soluciones 23 y $2x + 3$, respectivamente. (Y si elegimos el 10 para x , ¡la segunda operación ACABA SIENDO COMO la primera!)



Y si aceptamos polinomios con coeficientes negativos, se nos planteará un reto interesante. (Esto no es muy habitual en la aritmética en base diez.)

Introducción

Podéis ver el vídeo de bienvenida, en el que James introduce esta experiencia, aquí: <https://globalmathproject.org/exploding-dots/> [1:12 minutos].

La división en cualquier base

Podéis ver un vídeo de James sobre esta lección aquí:

<https://globalmathproject.org/exploding-dots/> [9:59 minutos].

Este es el guion que sigue James cuando explica la lección en la pizarra. Por supuesto, podéis adaptarlo como mejor os convenga. En el vídeo podréis ver cuándo y cómo dibuja James los diagramas y cómo los va ampliando.

Muy bien. Hasta aquí hemos trabajado la aritmética de primaria. Ahora vamos al álgebra avanzada de secundaria.

¡Ostras!

Bueno, la realidad es que no tiene ninguna complicación. Ya hemos hecho todo el trabajo.

Lo único que tenemos que entender es que la máquina $1 \leftarrow 10$ no tiene nada de especial. Si quisiéramos, podríamos hacer toda la aritmética de primaria en una máquina $1 \leftarrow 2$, o en una máquina $1 \leftarrow 5$ o, incluso, en una máquina $1 \leftarrow 37$. A las mates les da igual en qué máquina lo hagamos. Solo es que los humanos tenemos predilección por el número diez y tendemos a la máquina $1 \leftarrow 10$.

Vamos a repasar ahora buena parte de lo que hemos hecho. Pero, en esta ocasión, lo haremos ¡en todas las máquinas posibles a la vez!

Parece una locura, pero es lo más sencillo del mundo.

Espero que hayáis seguido mi consejo y hayáis mantenido en la pizarra la imagen de $276 \div 12 = 23$ en una máquina $1 \leftarrow 10$. (Si no lo habéis hecho, improvisad, que ahora viene un momento clave.)

Bien, ahora dibujaré una máquina en la pizarra, pero no os diré cuál. Podría ser otra máquina $1 \leftarrow 10$, pero no voy a decirlo. Tal vez sea una máquina $1 \leftarrow 2$, o una máquina $1 \leftarrow 4$ o una máquina $1 \leftarrow 13$. El caso es que no lo sabréis porque no lo diré. No me apetece y ya está.

En el álgebra de secundaria hay una letra que, al parecer, es la preferida para representar una cantidad cuyo valor no se conoce. Es la letra x .

Trabajamos, pues, con una máquina $1 \leftarrow x$ donde la letra x representa una cifra cuyo valor desconocemos.

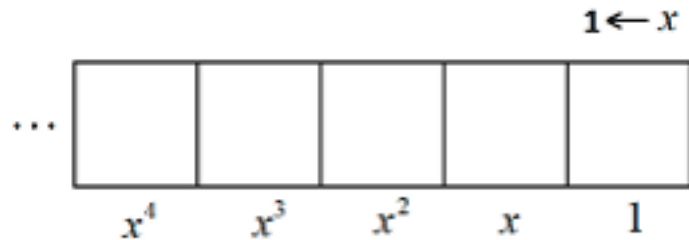
En una máquina $1 \leftarrow 10$, los valores posicionales de las casillas son las potencias de diez: 1, 10, 100, 1000...

En una máquina $1 \leftarrow 2$, los valores posicionales de las casillas son las potencias de dos: 1, 2, 4, 8, 16...

© 2017 James Tanton. Reservados algunos derechos. gdaymath.com

Esta obra tiene una licencia de [Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Unported License \(CC BY-NC-SA 3.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/)

Y así sucesivamente. En una máquina $1 \leftarrow x$, los valores posicionales de las casillas serán las potencias de x :



Hagamos una prueba: si os digo que, en mi cabeza, x es 10, las potencias $1, x, x^2, x^3 \dots$ se corresponden con los números $1, 10, 100, 1000 \dots$, lo cual es correcto para una máquina $1 \leftarrow 10$. Pero si os digo que, en realidad, en mi cabeza x es 2, las potencias $1, x, x^2, x^3 \dots$ se corresponderán con los números $1, 2, 4, 8 \dots$, lo cual es correcto para una máquina $1 \leftarrow 2$.

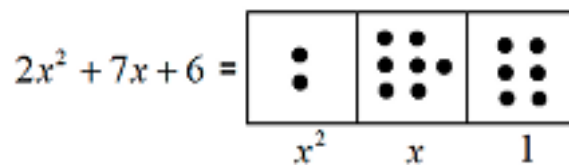
¡Esta máquina $1 \leftarrow x$, en realidad, representa todas las máquinas a la vez!

Muy bien. Ahora, inesperadamente, tenemos esta operación de álgebra avanzada de secundaria.

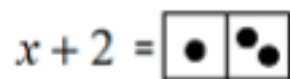
Calculad $(2x^2 + 7x + 6) \div (x + 2)$

Escribo la operación en la pizarra y les digo, insistentemente, a los alumnos que intenten hacerla, por mucho miedo que les dé. A menudo hay alguna resistencia inicial, pero los alumnos acaban superando los nervios y se les ocurre algo: ponen dos puntos en la casilla de x^2 , siete en la casilla de x y seis en la casilla de 1. Después, suelen dibujar $x + 2$ como un punto seguido de dos puntos, y empiezan a buscar este patrón en la imagen de $2x^2 + 7x + 6$. Cuando ya ha pasado un tiempo razonable, entro yo:

Así se ve $2x^2 + 7x + 6$ en una máquina $1 \leftarrow x$: dos x^2 , siete x y seis unos.



Y así se ve $x + 2$.




La división $2x^2 + 7x + 6 \div (x + 2)$ nos pide que encontremos copias de x en la imagen de $2x^2 + 7x + 6$.

$$2x^2 + 7x + 6 =$$

$$x + 2 =$$

Veo dos copias de $x + 2$ en el nivel x y tres copias en el nivel 1. La solución es $2x +$

3.  **Mirad fijamente la imagen de $(2x^2 + 7x + 6) \div (x + 2) = 2x + 3$. ¿Os suena?**


Aquí, normalmente, apoyo la espalda en la pared y, con una mano, señalo la imagen anterior de $276 \div 12$ y, con la otra mano, señalo la nueva imagen de $(2x^2 + 7x + 6) \div (x + 2)$.

¡Las imágenes son idénticas!

¡Acabamos de hacer una operación de álgebra de secundaria como si fuera una operación

In a $1 \leftarrow 10$ machine.

$$276 \div 12 = 23$$



SAME PICTURE!

In a $1 \leftarrow x$ machine.

$$(2x^2 + 7x + 6) \div (x + 2) = 2x + 3$$

En una

màquina $1 \leftarrow 10$ En una màquina $1 \leftarrow x$

¡MISMA IMAGEN!

¿Qué ha pasado?

Imaginaos que os he dicho que, en realidad, en mi cabeza x era 10 todo el rato. Entonces, $2x^2 + 7x + 6$ es el número $2 \times 10 + 7 \times 10 + 6$, que es 276; y $x + 2$ es el número $10 + 2$, es decir, 12. Por tanto, hemos calculado $276 \div 12$. Y, como os he dicho que x es 10, hemos obtenido el resultado $2x + 3$, que es $2 \times 10 + 3 = 23$.

Por tanto, ¡acabamos de repetir un problema aritmético de primaria!

Aparte: Por cierto, si ahora os digo que x era 2, entonces

$$2x^2 + 7x + 6 = 2 \times 4 + 7 \times 2 + 6, \text{ que es } 28,$$

$$x + 2 = 2 + 2, \text{ que es } 4,$$

y

$$2x + 3 = 2 \times 2 + 3, \text{ que es } 7.$$

Acabamos de calcular $28 \div 4 = 7$, ¡y es correcto!

© 2017 James Tanton. Reservados algunos derechos. gdaymath.com

Esta obra tiene una licencia de [Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Unported License \(CC BY-NC-SA 3.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/)

5

Guía didáctica. Puntos que explotan Experiencia 6: Todas las bases, y todas a la vez: los polinomios

Hacer divisiones en una máquina $1 \leftarrow x$ es, en realidad, hacer un número infinito de divisiones de golpe. ¡Guau!



Intentad calcular $(2x^3 + 5x^2 + 5x + 6) \div (x + 2)$ en una máquina $1 \leftarrow x$ para obtener la solución $2x^2 + x + 3$. (Y si os digo que, en mi cabeza, x es 10, ¿veis que esto se corresponde con $2256 \div 12 = 213$?)

Dejad que los alumnos lo prueben.

En secundaria, normalmente, los números expresados en una máquina $1 \leftarrow x$ se denominan *polinomios*. Son como los números expresados en base 10, excepto que ahora son «números» expresados en base x . (Y si alguien os dice que x es 10, no tengáis dudas: ¡son números en base 10!)

Tener esto en cuenta hace que buena parte del álgebra de secundaria sea tan sencilla: es una repetición de la aritmética en base 10 de primaria.



Suelo dejar que los alumnos intenten hacer esta otra, en forma de

fracción: $(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 6x + 3)$

$(x^2 + 3)$

(La solución es $x^2 + 2x + 1$.)

Material A: La división en cualquier base

Utilizad el material que encontraréis a continuación para los alumnos que quieran practicar con las preguntas de esta lección y reflexionar sobre ellas después en casa. NO son deberes, es totalmente opcional. (Existe una versión imprimible *Puntos que explotan. Experiencia 6.*)

© 2017 James Tanton. Reservados algunos derechos. gdaymath.com

Esta obra tiene una licencia de [Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Unported License \(CC BY-NC-SA 3.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/)

6

Guía didáctica. Puntos que explotan Experiencia 6: Todas las bases, y todas a la vez: los polinomios

Puntos que explotan

Experiencia 6: Todas las bases, y todas a la vez: los polinomios

Podéis acceder a los vídeos de todas las lecciones de *Puntos que explotan* aquí:

<https://globalmathproject.org/exploding-dots/>

Material A: La división en cualquier base

¡Las operaciones $276 \div 12$ y $(2x^2 + 7x + 6) \div (x + 2)$ son idénticas!

En una màquina $1 \leftarrow 10$ En una màquina $1 \leftarrow x$

¡MISMA IMAGEN!

Aquí tenéis unos enunciados que podéis plantear, si queréis:

1. a) Calculad $(2x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 4x + 1) \div (2x + 1)$.

b) Calculad $(x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 5x + 3) \div (x^2 + x + 1)$.

Si os digo que x es 10 en las dos operaciones, ¿qué dos divisiones acabáis de calcular en aritmética normal?

2. Aquí tenemos una división de polinomios en forma de fracción. ¿Podéis hacerla? (¿Hay alguna pequeña dificultad que se deba tener en cuenta?)

$$\frac{(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 6x + 3)}{(x^2 + 3)}$$

3. Demostrad que $(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1) \div (x + 1)$ equivale a $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.

a) ¿Cuál es el resultado cuando $x = 10$?

b) ¿Cuál es el resultado cuando $x = 2$?

c) ¿Cuál es el resultado cuando x equivale a 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 11?

d) ¿Cuál es el resultado cuando $x = 0$?

e) ¿Cuál es el resultado cuando $x = -1$?

© 2017 James Tanton. Reservados algunos derechos. gdaymath.com

Esta obra tiene una licencia de [Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Unported License \(CC BY-NC-SA 3.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/)

7

Guía didáctica. Puntos que explotan Experiencia 6: Todas las bases, y todas a la vez: los polinomios

Soluciones a las preguntas de «Material A»

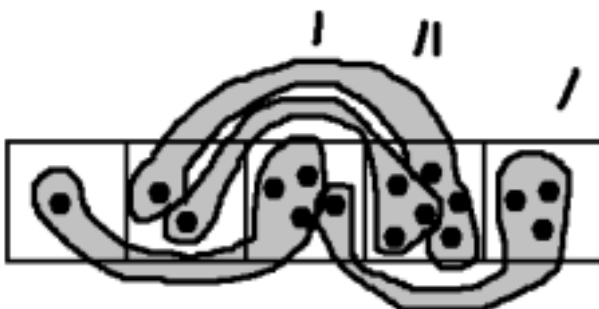
1.

a) $(2x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 4x + 1) \div (2x + 1) = x^3 + x^2 + 2x + 1$.

b) $(x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 5x + 3) \div (x^2 + x + 1) = x^2 + 2x + 3$.

Y si resulta que x es 10, lo que acabamos de calcular es $23541 \div 21 = 1121$ y $13653 \div 111 =$

123. 2. Sí que podemos. La solución es $x^2 + 2x + 1$.



3.

a) Con $x = 10$ sería $14641 \div 11 = 1331$.

b) Con $x = 2$ sería $81 \div 3 = 27$.

c) Con $x = 3$ sería $256 \div 4 = 64$.

Con $x = 4$ sería $625 \div 5 = 125$.

Con $x = 5$ sería $1296 \div 6 = 216$.

Con $x = 6$ sería $2401 \div 7 = 343$.

Con $x = 7$ sería $4096 \div 8 = 512$.

Con $x = 8$ sería $6561 \div 9 = 729$.

Con $x = 9$ sería $10000 \div 10 = 1000$.

Con $x = 11$ sería $20736 \div 12 = 1728$.

d) Con $x = 0$ sería $1 \div 1 = 1$.

e) Con $x = -1$ sería $0 \div 0 = 0$. Mmm. ¡Qué raro...! (¿Podemos tener una máquina $1 \leftarrow 0$?)

© 2017 James Tanton. Reservados algunos derechos. gdaymath.com

Esta obra tiene una licencia de [Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Unported License \(CC BY-NC-SA 3.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/)

8

Guía didáctica. Puntos que explotan Experiencia 6: Todas las bases, y todas a la vez: los polinomios

¡Problema!

Podéis ver un vídeo de James sobre esta lección aquí:

<https://globalmathproject.org/exploding-dots/> [2:37 minutos].

Muy bien. Ahora que todos estamos muy cómodos haciendo álgebra avanzada, tengo que confesaros algo: ¡he hecho trampa!

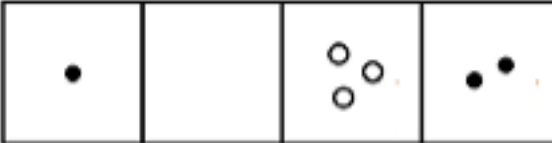
He elegido ejemplos pensados para que resulten interesantes y fluyan sin problemas. Pero la verdad es que este fantástico método nuestro no suele funcionar tan bien.


Fijaos en este ejemplo:

$$\begin{array}{r} (x^3 - 3x + 2) \\ (x + 2) \end{array}$$

¿Veis qué he estado evitando hasta ahora? Exacto: los números

negativos. Esto es lo que veo en una máquina $1 \leftarrow x$:

$$x^3 - 3x + 2 =$$


$$x+2 =$$


Estamos buscando, en la imagen $x^3 - 3x + 2$, un punto seguido de dos puntos, ¡y no veo ninguno!

Así que..., ¿qué podemos hacer, aparte de llorar un poco?

¿Se os ocurre algo?

Dejo que los alumnos le den vueltas, y les insisto en que es un método que falla.

En algún momento, alguien propondrá la idea de hacer no explotar uno de los puntos situados a la izquierda del todo. ¡Qué buena idea! Lo es, realmente. Pero tiene un inconveniente: no sabemos qué valor tiene x ; por tanto, no sabemos cuántos puntos tenemos que dibujar cuando hacemos la no explosión. Vaya...

Mi enhorabuena a quien haya propuesto esta brillante idea. Lamento que al final no haya sido útil.

Necesitamos una gran revelación que nos diga algo inteligente que podamos hacer. O tal vez es que los polinomios con números negativos no se pueden resolver con puntos y casillas.

¿Qué pensais? ¿Alguna revelación?

© 2017 James Tanton. Reservados algunos derechos. gdaymath.com

Esta obra tiene una licencia de [Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Unported License \(CC BY-NC-SA 3.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/)

9

Guía didáctica. Puntos que explotan Experiencia 6: Todas las bases, y todas a la vez: los polinomios

Solución

Podéis ver un vídeo de James sobre esta lección aquí:

<https://globalmathproject.org/exploding-dots/> [5:55 minutos].

Estamos encallados

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x + 2 \\ x + 2 \end{array}$$

con la imagen de la máquina $1 \leftarrow x$:

$$x^3 - 3x + 2 =$$

•		○ ○ ○	• •
---	--	-------	-----

$$x+2 =$$

•	• •
---	-----

Estamos buscando copias de $x^3 - 3x + 2$, un punto seguido de dos puntos, en cualquier posición de la imagen de $x^3 - 3x + 2$. ¡Y no vemos ni uno!

Y no podemos ayudarnos haciendo no explotar puntos, porque desconocemos el valor de x . (No sabemos cuántos puntos tenemos que dibujar para no hacer explosiones.)

Parece que estamos en una situación desesperada.

Pero os puedo dar un consejo que, de hecho, es una lección de vida. Es esto: **SI**

QUIERES ALGO EN LA VIDA, ¡HAZLO POSIBLE! (Y atente a las consecuencias.) Ahora

mismo, ¿hay algo que querramos en la vida?

Fijaos en el punto solitario de la izquierda. ¿No sería bonito tener dos puntos en la casilla de al lado y, así, obtener una copia de $x + 2$?

¡Venga, pongamos dos puntos en la casilla vacía! Como es lo que quiero, ¡lo haré posible!

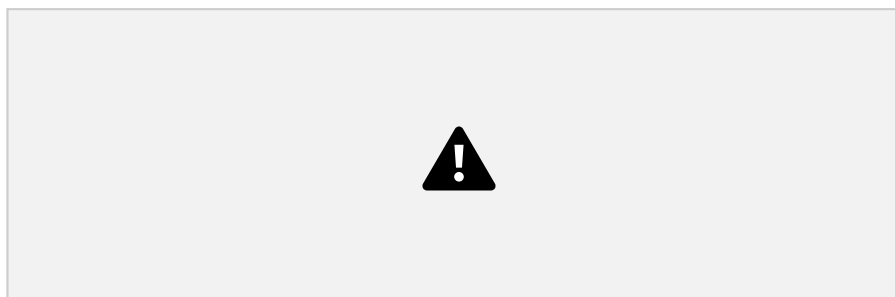
Pero hay consecuencias: se supone que la casilla está vacía; así que, para que siga vacía, podemos añadirle dos antipuntos.

© 2017 James Tanton. Reservados algunos derechos. gdaymath.com

Esta obra tiene una licencia de [Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Unported License \(CC BY-NC-SA 3.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/)

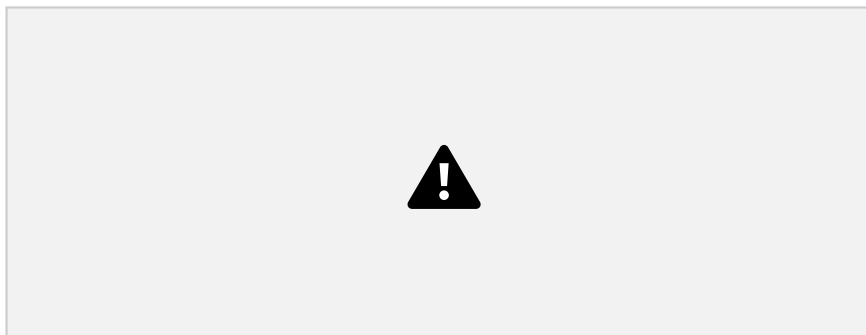
10

Guía didáctica. Puntos que explotan Experiencia 6: Todas las bases, y todas a la vez: los polinomios



¡Genial!

Ahora sí que tenemos una copia de lo que buscamos.



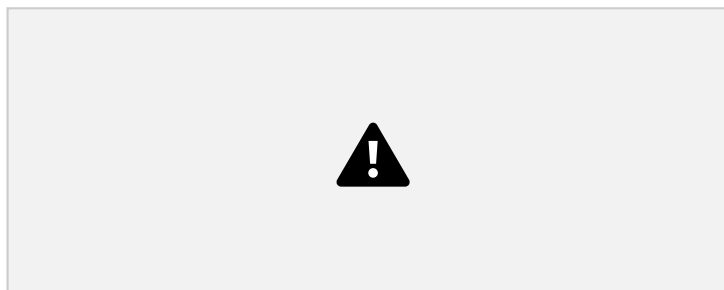
Tal vez algún alumno haya propuesto añadir puntos y antipuntos. Si así es, seguidle el hilo, pero evitad los términos especializados que pueda utilizar (por ejemplo, «par cero»). Yo lo reformulo con palabras sencillas.

Sigo hablando de la «lección de vida», y les digo que «PAULA ha aprendido una gran lección de vida». Pero la pregunta sigue ahí: ¿es útil esta idea tan brillante?

Mmm.

Vale. ¿Hay algo más en la vida que queráis ahora mismo? ¿Podéis crear otra copia de $x+2$ en algún sitio?

Personalmente, a mí me gustaría un punto a la izquierda del par de puntos situados en la casilla de más a la derecha. ¡Lo haré posible! Añadiré un punto y un par de antipuntos. Así conseguiré otra copia de $x+2$.



Todo esto está muy bien, pero ¿nos hemos quedado encallados? Tal vez esta idea tan brillante no es realmente útil.

© 2017 James Tanton. Reservados algunos derechos. gdaymath.com
Esta obra tiene una licencia de [Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Unported License \(CC BY-NC-SA 3.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/)

11

Guía didáctica. Puntos que explotan Experiencia 6: Todas las bases, y todas a la vez: los polinomios

Aquí hago una pausa. Quizá algún alumno pregunta qué vamos a hacer a continuación. Si es así, seguidle el hilo.

Mirad esta imagen un momento. ¿Veis algo?



Fijaos bien y ¡empezaréis a ver copias del opuesto exacto de lo que estamos buscando! En vez de un punto seguido de dos puntos, hay copias de un antipunto seguido de dos antipuntos.



¡Guau!

¿Y cómo leemos la solución? Vemos que $(x^3 - 3x + 2) \div (x + 2)$ da $x^2 - 2x +$

1. ¡Fantástico!

Por tanto, os he engañado, ¡no había hecho trampa! Sí que podemos hacer todas las divisiones de polinomios con este método de los puntos y las casillas, ¡incluso las que tienen números negativos!



Normalmente, aquí pido a los alumnos que lo prueben ellos solos, como, por ejemplo, con $x^{10} - 1$

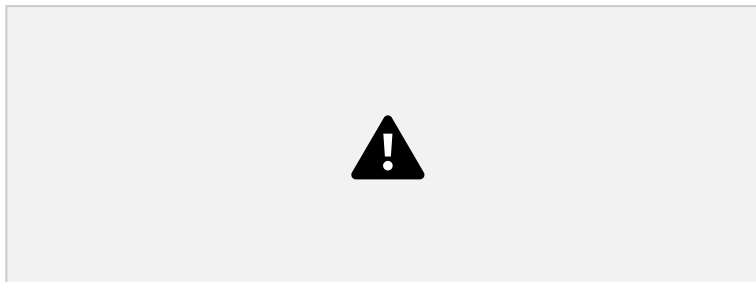
$$x^2 - 1$$

(la solución es $x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1$).

También suelo presentar ahora algunas ideas infinitas en la próxima experiencia. Intentad presentar el reto siguiente.



Aquí tenemos una imagen del polinomio 1, muy sencillo, y el polinomio $1 - x$.



¿Podéis calcular $\frac{1}{1-x}$

¿Podéis interpretar la solución?

© 2017 James Tanton. Reservados algunos derechos. gdaymath.com

Esta obra tiene una licencia de [Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Unported License \(CC BY-NC-SA 3.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/)

12

Guía didáctica. Puntos que explotan Experiencia 6: Todas las bases, y todas a la vez: los polinomios

La solución que nos da es $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$, una solución que continua indefinidamente. (Podéis ver el vídeo de la lección 7.2 aquí: <https://globalmathproject.org/exploding-dots/>) Eso demuestra la famosa fórmula de la serie geométrica, que en los libros de texto se presenta normalmente así:

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

También puedo poner estos «deberes opcionales»:

Calculad ¹

$1 - x - x^2$ y a ver si podéis desvelar una secuencia de números muy famosa. **Aviso:** ¡Dibujad casillas muy grandes!

La solución es $1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + 13x^6 + 21x^7 + \dots$, y en ella vemos los números de Fibonacci.

Material B: *Problema y solución*

Utilizad el material que encontraréis a continuación para los alumnos que quieran practicar con las preguntas de esta lección y reflexionar sobre ellas después en casa. NO son deberes, es totalmente opcional. (Existe una versión imprimible: *Puntos que explotan. Experiencia 6.*)

Puntos que explotan

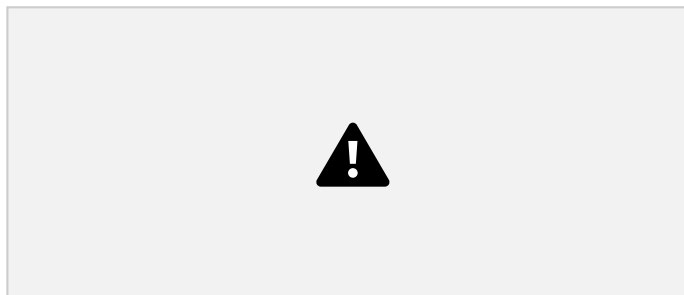
Experiencia 6: Todas las bases, y todas a la vez: los polinomios

Podéis acceder a los vídeos de todas las lecciones de *Puntos que explotan* aquí:

<https://globalmathproject.org/exploding-dots/>

Material B: Problema y solución

Podemos trabajar con antipuntos incluso en la división de polinomios.



Aquí tenéis unos enunciados que podéis plantear, si queréis:

1. Calculad $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

$$x - 1 \cdot$$

2. Determinad $4x^3 - 14x^2 + 14x - 3$

$$2x - 3 \cdot$$

3. Si podéis hacer esta operación, $4x^5 - 2x^4 + 7x^3 - 4x^2 + 6x - 1$

$$x^2 - x + 1 \text{ ¿ seguramente podréis}$$

hacerlas todas!

4. Esta es superdivertida: $x^{10} - 1$

$$x^2 - 1 \cdot$$

Aparte: ¿Hay alguna manera fácil de trabajar con el método de puntos y casillas en papel? En vez de dibujar casillas y puntos, ¿podemos trabajar con tablas de números que incluyan los coeficientes? (El término *sintético* se aplica a menudo a algoritmos en los que se usan uno o dos pasos menos de los que estamos viendo aquí.)

5. ¿Podéis deducir cuál será la solución de $(2x^2 + 7x + 7) \div (x + 2)$ antes de hacer la operación?

6. Calculad x^4

$$x^2 - 3 \cdot$$

7. Probad con esta, que es una locura: $5x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 7$

$$x^3 - 4x + 1 \cdot$$

Si la hacéis con papel y lápiz, en algún momento estaréis intentando dibujar 84 puntos. ¿Es fácil y rápido escribir el número 84? De hecho, ¿qué os parece escribir solo números, sin tener que dibujar ningún punto?

Soluciones a las preguntas de «Material B»

1. $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

$$x - 1 = x - 2x + 1.$$

2. $4x^3 - 14x^2 + 14x - 3$

$$2x - 3 = 2x^2 - 4x + 1.$$

3. $4x^5 - 2x^4 + 7x^3 - 4x^2 + 6x - 1$

$$x^2 - x + 1 = 4x^3 + 2x^2 + 5x - 1.$$

4. $x^{10} - 1$

$$x^2 - 1 = x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1.$$

5. Como sabemos que $(2x^2 + 7x + 6) \div (x + 2) = 2x + 3$, estoy seguro de que $(2x^2 + 7x + 7) \div (x + 2)$ da $2x + 3 + \frac{1}{x+2}$

$x + 2$. ¿Es así? ¿Y cómo interpretáis el resto?

6. x^4

$$x^2 - 3 = x^2 + 3 + 9$$

$$x^2 - 3.$$

7. $5x^2 - 2x + 21 \div -14x^5 + 82x - 14$

$$x^3 - 4x + 1.$$

Material C: Exploraciones brutales

Utilizad el siguiente material para facilitarlo a aquellos alumnos que quieran reflexionar después en casa con preguntas profundas relacionadas con la experiencia. NO son deberes, es totalmente opcional, pero podría servir como fuente para futuros proyectos de los alumnos. (Existe una versión imprimible: *Puntos que explotan. Experiencia 6.*)

© 2017 James Tanton. Reservados algunos derechos. gdaymath.com

Esta obra tiene una licencia de [Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Unported License \(CC BY-NC-SA 3.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/)

15

Guía didáctica. Puntos que explotan Experiencia 6: Todas las bases, y todas a la vez: los polinomios

Puntos que explotan

Experiencia 6: Todas las bases, y todas a la vez: los polinomios

Podéis acceder a los vídeos de todas las lecciones de *Puntos que explotan* aquí:
<https://globalmathproject.org/exploding-dots/>

Material C: *Exploraciones brutales*

Aquí tenéis algunas investigaciones sobre «grandes preguntas»: podéis explorarlas o simplemente reflexionar sobre ellas. ¡Divertíos!

EXPLORACIÓN 1: ¿PODEMOS EXPLICAR UN TRUCO ARITMÉTICO?

Os presento una forma atípica de dividir por nueve.

Para calcular, por ejemplo, $21203 \div 9$, leed «21203» de izquierda a derecha e id calculando las sumas parciales de los dígitos:

$$\begin{aligned}2 &= 2 \\2 + 1 &= 3 \\2 + 1 + 2 &= 5 \\2 + 1 + 2 + 0 &= 5 \\2 + 1 + 2 + 0 + 3 &= 8\end{aligned}$$

Y después leed en voz alta la solución:

$$21203 \div 9 = 2355 R 8$$

Del mismo modo,

$$1033 \div 9 = 1 \mid 1 + 0 \mid 1 + 0 + 3 \mid R 1 + 0 + 3 + 3 = 114 R 7$$

y

$$2222 \div 9 = 246 R 8$$

¿Podéis explicar por qué funciona este truco?

Este es el método que seguiría yo: para el primer ejemplo, dibujad una imagen de 21203 en una máquina $1 \leftarrow 10$, pero pensad en el nueve como $10 - 1$. Es decir,

buscad copias de en la imagen.

EXPLORACIÓN 2: ¿PODEMOS EXPLORAR LA TEORÍA DE NÚMEROS?

Utilizad una máquina 1 ← x para calcular:

a) $x^2 - 1$

$x - 1$ b) $x^3 - 1$

$x - 1$ c) $x^6 - 1$

$x - 1$ d) $\frac{x^{10} - 1}{x - 1}$

¿Podéis ver ahora que $x^{\text{número}} - 1$

$x - 1$ siempre tendrá una bonita solución sin resto?

Otro modo de expresarlo es que

$$x^{\text{número}} - 1 = (x - 1) \times (\text{algo})$$

Por ejemplo, ya habréis visto en la operación c que $x^6 - 1 = (x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$. Esto significa que podemos decir, por ejemplo, que ¡seguro que $17^6 - 1$ es múltiplo de 16! ¿Cómo? Decide que $x = 17$ en esta fórmula para obtener

$$17^6 - 1 = (17 - 1) \times (\text{algo}) = 16 \times (\text{algo})$$

a) Explicad por qué $999^{100} - 1$ tiene que ser múltiplo de 998.

b) ¿Podéis explicar por qué $2^{100} - 1$ tiene que ser múltiplo de 3, y múltiplo de 15, y múltiplo de 31, y múltiplo de 1023? (Pista: $2^{100} = (2^2)^{50} = 4^{50}$, y así sucesivamente.)

c) ¿Es $x^{\text{número}} - 1$ siempre múltiplo de $x + 1$? ¿A veces, al menos?

d) El número $2^{100} + 1$ no es primo. Es múltiplo de 17. ¿Podéis demostrarlo de algún modo?