Guía didáctica
Puntos que explotan
(Exploding Dots™)

Experiencia 3:
La suma y la multiplicación

Visión general 2 La suma 3 Apartado opcional: *El algoritmo tradicional* 6 Material A: *La suma* 7 Soluciones a las preguntas de «Material A» 10 **La multiplicación 11** Material B: *La multiplicación* 13 Soluciones a las preguntas de «Material B» 14 Apartado opcional: Multiplicar por diez 14 Apartado opcional: La multiplicación larga 16 Material C: *Exploraciones brutales* 18

Recursos relacionados:

- Podéis acceder a los vídeos de *Puntos que explotan* (Exploding Dots™) aquí: https://globalmathproject.org/exploding-dots/
- Es recomendable repasar la guía *Getting Started*.
  - Encontraréis material imprimible para el alumno sobre esta experiencia.

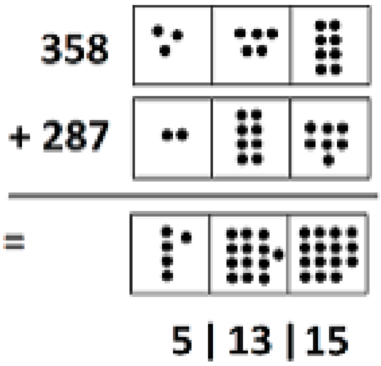
Experiencia 3: La suma y la multiplicación
Visión general

Objetivos del alumno

Los alumnos juegan ahora con la máquina $1 \leftarrow 10$ y analizan los algoritmos aritméticos a partir de esta máquina. Empiezan con sumas largas y, después, brevemente pasan a la multiplicación y vuelven a ver los algoritmos.

Breve resumen de la experiencia

Para sumar 358 y 287, solo hay que sumar 3 y 2 centenas, 5 y 8 decenas, y 8 y 7 unidades. El resultado es quinientos trece-ta quince.



Es una solución sólida y correcta desde el punto de vista matemático, pero que resulta extravagante para la sociedad. Con las explosiones podemos remediarlo y demostrar que esta solución equivale a 645.

Del mismo modo, 26417×3 equivale a $6 \mid 18 \mid 12 \mid 3 \mid 21$. Gracias a las explosiones, la solución se acerca más a las preferencias de la sociedad.

Introducción

Podéis ver el vídeo de bienvenida, en el que James introduce esta experiencia, aquí: https://globalmathproject.org/exploding-dots/ [0:40 minutos].

La suma

Podéis ver un vídeo de James sobre esta lección aquí: https://globalmathproject.org/exploding-dots/ [4:00 minutos].

Este es el guion que sigue James cuando explica la lección en la pizarra. Por supuesto, podéis adap tarlo como mejor os convenga. En el vídeo podréis ver cuándo y cómo dibuja James los diagramas y cómo los va ampliando.

A la sociedad le gusta trabajar en base diez. Por lo tanto, quedémonos con una máquina $1 \leftarrow 10$ durante un rato y démosle sentido a la aritmética que aprendemos en la escuela.

Hemos visto cómo se escriben los números. ¿Qué es lo primero que aprenden a hacer los alumnos con los números cuando ya saben escribirlos?

Los alumnos suelen responder «sumas» o «sumarlos».

Muy bien. Investiguemos la suma.

Aquí tenemos una suma: calculad $251 + 124$. Este problema suele plantearse del modo siguiente:

$$\begin{array}{r} 251 \\ +\,124 \\ \hline \end{array}$$

Esta suma es fácil de calcular: $2 + 1$ son 3; $5 + 2$ son 7; y $1 + 4$ son 5. Y aparece la solución:

$$\begin{array}{r} 251 \\ +\,124 \\ \hline 375 \end{array}$$

$375.$

Pero ¿os habéis fijado en una cosa curiosa?

La mayoría de los alumnos se han dado cuenta de que he hecho la operación de izquierda a dere cha y no de derecha a izquierda.

Sí. Lo he hecho de izquierda a derecha, tal como me enseñaron a leer. Supongo que es justo lo contrario de lo que se enseña a la mayoría de la gente en una clase de matemáticas: ir de derecha a izquierda.

Pero ¿esto es muy relevante? Si vais de derecha a izquierda, ¿obtenéis la misma solución, 375?

Los alumnos dicen que sí.

Entonces, ¿por qué en clase de matemáticas nos enseñan a hacerlo de derecha a izquierda?

A muchos, este problema que acabamos de hacer les parece «demasiado cómodo». Tendríamos que probarlo con una suma más difícil, como $358 + 287$.

$$\begin{array}{r} 358 \\ +\,287 \\ \hline \end{array}$$

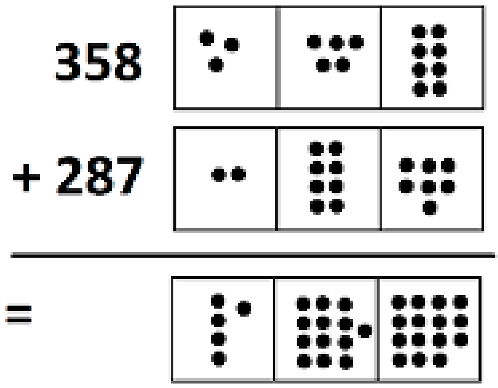
Muy bien. ¡Venga!

Si de nuevo vamos de izquierda a derecha $3 + 2$ son 5; $5 + 8$ son 13; y $8 + 7$ son 15. Y obtenemos el resultado de antes: quinientos trece-ta quince. (Recordad que *-ta* significa ‘diez’.)

$$\begin{array}{r} 358 \\ +\,287 \\ \hline 5|13|15 \end{array}$$

A mí se me da bien decir «quinientos trece-ta quince» rápido y casi sin pensarlo. ¡Probad también vosotros a decirlo! Los alumnos siempre se ríen cuando se lo propongo.

¡Y la solución es absolutamente correcta desde el punto de vista matemático! Podéis ver que es correcta si utilizáis una máquina $1 \leftarrow 10$. Aquí tenemos el 358 y el 287.



5 | 13 | 15

Si sumamos 3 centenas y 2 centenas, nos da claramente 5 centenas.

Si sumamos 5 decenas y 8 decenas, nos da claramente 13 decenas.

Si sumamos 8 unidades y 7 unidades, nos da claramente 15 unidades.

«Quinientos trece-ta quince» es una solución absolutamente correcta (e incluso la he dicho co rrectamente). Y es que tenemos 5 centenas, 13 decenas y 15 unidades. En esta solución no hay

ningún error desde el punto de vista matemático. Lo único es que suena rara. La sociedad prefiere que los números no se digan así.

Por tanto, la pregunta es:

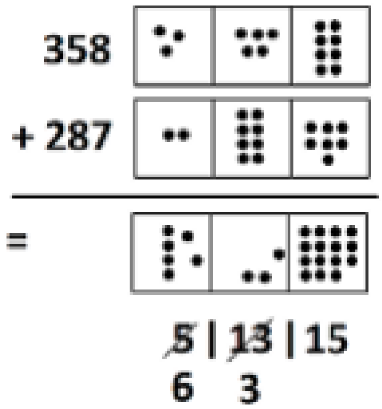
¿Podemos hacer que esta solución sea del gusto de la sociedad —no del de las matemáticas—, solo del gusto de la sociedad? ¿Podemos hacerlo?

¡Claro que sí! Podemos hacer explosiones. (Al fin y al cabo, es una máquina $1 \leftarrow 10$.)

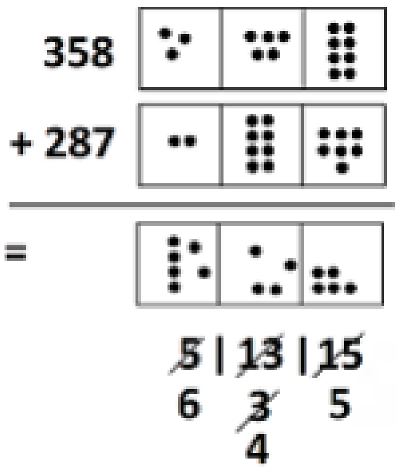
¿Cuál queréis que explote antes, el 13 o el 15?

La mayoría de los alumnos dice que el 15. Entonces, yo les digo: «¿Así que aún queréis ir de derecha a izquierda? Venga, hagamos primero el 13, ¡aunque sea para romper la costumbre!».

Diez puntos situados en la casilla del medio explotan y son sustituidos por un punto en la casilla de la izquierda.



Y aparece la solución: seiscientos tres-ta quince. Sigue siendo una solución muy bonita, y correcta desde el punto de vista matemático. Pero tal vez no le guste a la mayoría de la sociedad. Hagamos otra explosión: diez puntos en la casilla de la derecha del todo.



Ahora vemos la solución: seiscientos cuatro-ta cinco o, para que sea del gusto de la sociedad, seiscientos cuarenta y cinco.

Apartado opcional: *El algoritmo tradicional*

Podéis ver un vídeo de James sobre esta lección opcional aquí:

https://globalmathproject.org/exploding-dots/ [1:58 minutos].

¿En qué se diferencia este método de los puntos y las casillas respecto al algoritmo estándar, que es el más conocido?

Volvamos al ejemplo $358 + 287$. A la mayoría de la gente le resulta sorprendente (quizá incluso desconcertante) esta solución lineal de izquierda a derecha: $5 \mid 13 \mid 15$.

$$\begin{array}{r} 358 \\ +287 \\ \hline 5 \mid 13 \mid 15 \end{array}$$

Esto sucede porque el algoritmo tradicional nos hace ir de derecha a izquierda y empezar por $8 + 7$.

Ahora bien, en el algoritmo no escribimos 15, que es la solución. En vez de eso, hacemos explotar inmediatamente diez puntos y, en el papel, escribimos un 5 en la línea del resultado y un 1 peque ño sobre la columna del medio. A esto lo llamamos «llevar uno», que —correctamente— equivale a añadir un punto extra en la posición que ocupan las decenas.

$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ 358 \\ +287 \\ \hline 5 \end{array}$$

Veamos ahora las casillas del medio. La suma da 14 puntos en la casilla de las decenas ($5 + 8$ da trece puntos, además del punto extra procedente de la explosión anterior).

Y ahora hacemos otra explosión.

$$\begin{array}{r} {}^{1}\;{}^{1} \\ 358 \\ +287 \\ \hline 45 \end{array}$$

En el papel escribimos un 4 en la posición que ocupan las decenas de la línea del resultado, y po nemos otro 1 sobre la columna siguiente. Esto encaja perfectamente con la noción representada por el método de puntos y casillas.

Y ahora terminamos el problema añadiendo los puntos en la posición que ocupan las centenas.

$$\begin{array}{r} {}^{1}\,{}^{1} \\ 358 \\ +\,287 \\ \hline 645 \end{array}$$

Por tanto, vemos que el algoritmo tradicional funciona de derecha a izquierda, y va haciendo explosiones («lleva») a medida que avanzamos. El método del papel resulta rápido y conciso, quizá por ello ha sido el preferido para hacer sumas largas desde hace siglos.

El método *Puntos que explotan* funciona de izquierda a derecha, que es como nos enseñan a leer en castellano, y deja todas las explosiones para el final. Es fácil de entender y resulta un poco divertido.

Ambos métodos, por supuesto, son buenos y correctos. Elegir uno u otro es solo cuestión de gustos o de estilo personal. (Y no dudéis en proponer vuestros propios métodos, ¡que también serán correctos!)

Material A: *La suma*

Utilizad el material que encontraréis a continuación para los alumnos que quieran practicar con las preguntas de esta lección y reflexionar sobre ellas después en casa. NO son deberes, es totalmente opcional. (Existe una versión imprimible: *Puntos que explotan. Experiencia 3.*)

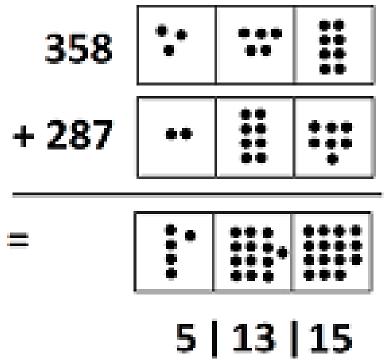
Puntos que explotan

Experiencia 3: La suma y la multiplicación

Podéis acceder a los vídeos de todas las lecciones de *Puntos que explotan* aquí:
https://globalmathproject.org/exploding-dots/

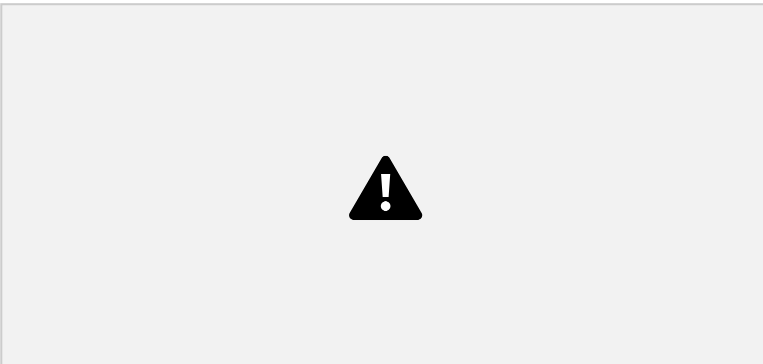
Material A: *La suma*

Así se hace la suma de 358 y 287 según el método *Puntos que explotan*.



Con las explosiones podemos ver que este resultado es equivalente a 645.

Escribid la solución de estas sumas, haciéndolas de izquierda a derecha ¡y sin tener en cuenta la opinión de la sociedad! Después, haced algunas explosiones para transformar cada solución en algo que la sociedad entienda.



Soluciones a las preguntas de «Material A»

148 + 323 = 4 | 6 | 11 = 471

567 + 271 = 7 | 13 | 8 = 838

377 + 188 = 4 | 15 | 15 = 5 | 5 | 15 = 565

582 + 714 = 12 | 9 | 6 = 1 | 2 | 9 | 6 = 1296

310462872 + 389107123 = 6 | 9 | 9 | 5 | 6 | 9 | 9 | 9 | 5 = 699569995

87263716381 + 18778274824 = 9 | 15 | 9 | 13 | 11 | 9 | 8 | 10 | 11 | 10 | 5 = ... = 106041991205

La multiplicación

Podéis ver un vídeo de James sobre esta lección aquí:
https://globalmathproject.org/exploding-dots/ [2:37 minutos].

Muy bien. La suma. ¿Y qué suelen aprender los alumnos después en la escuela?

Su respuesta siempre es la misma: «a restar». Y entonces yo les digo...

Esto es demasiado complicado. ¡Hagamos multiplicaciones!

Muy bien. La multiplicación. ¡Venga, manos a la obra!

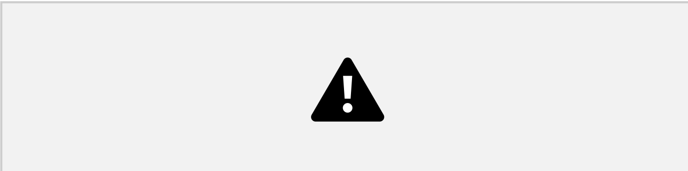
Tenéis menos de tres segundos para escribir una solución rápida y correcta para esta multiplica ción. Venga, ¿alguien la tiene?

Normalmente exagero un poco. Me quedo de pie y cuento lentamente hasta tres o algo así.

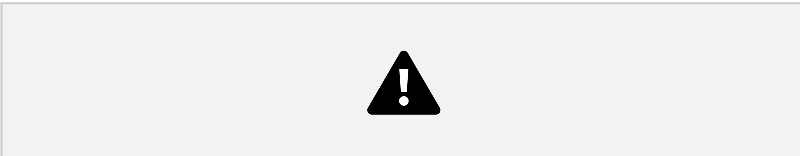
¿Veis que $6 \mid 18 \mid 12 \mid 3 \mid 21$, es decir, seis decenas de millares, dieciocho millares, doce centenas y tres-ta veintiuno, es correcto y funciona?

Esto es lo que está pasando.

Empezamos con una imagen de 26417 en una máquina $1 \leftarrow 10$. (¿Os parece bien que sólo escriba los números y no dibuje los puntos?)



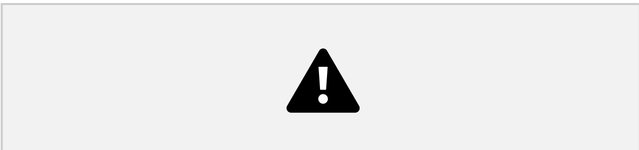
Se nos pide que multipliquemos por tres este número.



En este momento tenemos 2 decenas de millares. Si los multiplicamos por tres, tendremos 6 dece nas de millares.

En este momento tenemos 6 millares, que se convertirán en 18 millares si los multiplicamos por tres.

Asimismo, 4 centenas se convierten en 13 centenas, 1 decena se convierte en 3 decenas, y 7 uni dades se convierten en 21 unidades.



Vemos que la solución es: sesenta dieciocho millares, doce centenas y tres-ta veintiuno. ¡Una solución absolutamente sólida y correcta desde el punto de vista matemático!

Y ahora, ¿qué hacemos para que esta solución guste a la sociedad?

¡Hacemos explosiones, claro!

¿Qué explosión queréis hacer primero?

Llegados a este punto, los alumnos suelen elegir un número situado en el medio en vez del que está más a la derecha. ¡Perfecto!

Muy bien. Hacemos explotar primero el 12. Da

$$6 \mid 19 \mid 2 \mid 3 \mid 21$$

¿Queréis seguir? ¿O queréis dejarlo aquí y decir que, si queremos, podemos darlo por terminado?

Según lo que respondan los alumnos, podemos seguir hasta obtener el resultado final, 79251, o bien dejarlo aquí y pasar a otra cosa.

Observación: Por lo general, los alumnos no me preguntan por la multiplicación larga. Si os lo preguntan a vosotros, podéis hacer los otros dos apartados opcionales de esta experiencia.

Material B: *La multiplicación*

Utilizad el material que encontraréis a continuación para los alumnos que quieran practicar con las preguntas de esta lección y reflexionar sobre ellas después en casa. NO son deberes, es totalmente opcional. (Existe una versión imprimible: *Puntos que explotan. Experiencia 3.*)

Puntos que explotan

Experiencia 3: La suma y la multiplicación

Podéis acceder a los vídeos de todas las lecciones de *Puntos que explotan* aquí:
https://globalmathproject.org/exploding-dots/

Material B: *La multiplicación*

Vemos que

$$26417 \times 3 = 6 \mid 18 \mid 12 \mid 3 \mid 21$$

Con las explosiones, esta solución puede reescribirse como 79251.

A continuación, encontraréis más operaciones sobre las que, si queréis, podéis reflexionar. Calculad: 26417×4, 26417×5 y 26417×9.

Calculad 26417×10 y explicad por qué la solución tiene que ser 264170.

(Esta solución se parece al número original, pero con el dígito 0 añadido al final.) **Extra:** ¿Os apetece calcular 26417×11, además de 26417×12?

(Tal vez la respuesta sea: «¡No, no me apetece hacerlo!».)

Soluciones a las preguntas de «Material B»

Tenemos

$26417 \times 4 = 8 \mid 24 \mid 16 \mid 4 \mid 28 = 10 \mid 4 \mid 16 \mid 4 \mid 28 = 1 \mid 0 \mid 4 \mid 16 \mid 4 \mid 28 = 1 \mid 0 \mid 5 \mid 6 \mid 4 \mid 28 = 105668$ $26417 \times 5 = 10 \mid 30 \mid 20 \mid 5 \mid 35 = 10 \mid 30 \mid 20 \mid 8 \mid 5 = 10 \mid 32 \mid 0 \mid 8 \mid 5 = 13 \mid 2 \mid 0 \mid 8 \mid 5 = 132085$ $26417 \times 9 = 18 \mid 54 \mid 36 \mid 9 \mid 63 = 18 \mid 54 \mid 36 \mid 15 \mid 3 = \ldots = 237753$

$26417 \times 10 = 20 \mid 60 \mid 40 \mid 10 \mid 70 = \ldots = 264170$

y

$26417 \times 11 = 22 \mid 66 \mid 44 \mid 11 \mid 77 = \ldots = 290587$

$26417 \times 12 = 24 \mid 72 \mid 48 \mid 12 \mid 84 = \ldots = 317004$

En el último apartado de esta experiencia se analiza con más detalle por qué 26417×10 da 264170.

Apartado opcional: *Multiplicar por diez*

¿Por qué la solución de 26417×10 *se parece al número original pero con un cero añadido al final?*

Recuerdo que esta regla me la enseñaron en la escuela: para multiplicar por diez, tienes que añadir un cero. Por ejemplo,

$$37 \times 10 = 370$$
$$98989 \times 10 = 989890$$
$$100000 \times 10 = 1000000$$

y así sucesivamente.

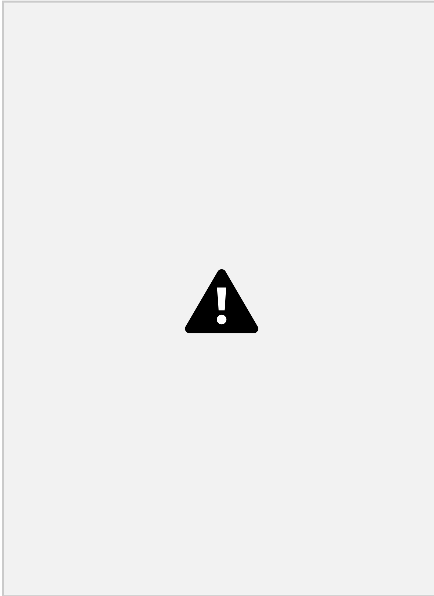
Esta afirmación encaja perfectamente con el planteamiento de los puntos y las casillas.

Aquí tenemos de nuevo el número 26417, en una máquina $1 \leftarrow 10$.

Y aquí tenemos 26417×10.

Hacemos ahora las explosiones, una a una. (Necesitaremos otra casilla a la izquierda.)

Tenemos que 2 grupos de diez explotan y dan 2 puntos en la siguiente casilla de la izquierda, y que 6 grupos de diez explotan y dan 6 puntos en la siguiente casilla de la izquierda, y que 4 grupos de diez explotan y dan 4 puntos en la siguiente casilla de la izquierda, y así sucesivamente. Los dígi tos con los que trabajamos no cambian. De hecho, el resultado final que vemos es que todos los dígitos se desplazan una posición a la izquierda y dejan cero puntos en la casilla de las unidades.



Y parece que hemos añadido un cero a la derecha de 26417. (Pero, en realidad, esto es así por la gran cantidad de explosiones que hemos hecho.)

Veamos ahora dos problemas prácticos:

a) ¿Cuál tiene que ser la solución de 476×10? ¿Y de 476×100?

b) ¿Cuál tiene que ser la solución de $9190 \div 10$? ¿Y de $3310000 \div 100$?

Apartado opcional: *La multiplicación larga*

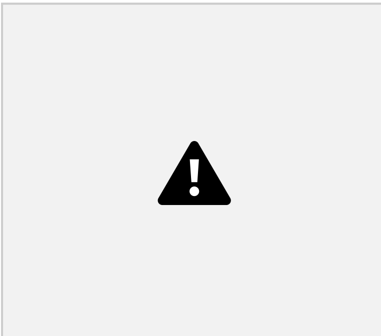
¿Es posible hacer, por ejemplo, 37×23, con puntos y casillas?

Aquí se nos pide que multipliquemos tres decenas por 23 y siete unidades por 23. Si se os dan bien los múltiples de 23, esto tiene que dar $3 \times 23 = 69$ decenas y $7 \times 23 = 161$ unidades. Así pues, la solución es $69 \mid 161$. Con explosiones, daría 851.

Pero este método parece difícil, porque tienes que saber los múltiples de 23.

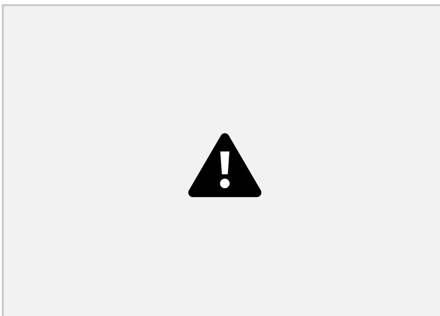
Ejercicio de reflexión:

María estuvo reflexionando un ratito sobre 37×23, y al final lo representó así.



Después, dijo que $37 \times 23 = 6 \mid 23 \mid 21 = 8 \mid 3 \mid 21 = 851$.

a) ¿Podéis averiguar cuál fue el razonamiento de María? Aquí tenemos otro ejemplo que representó después.



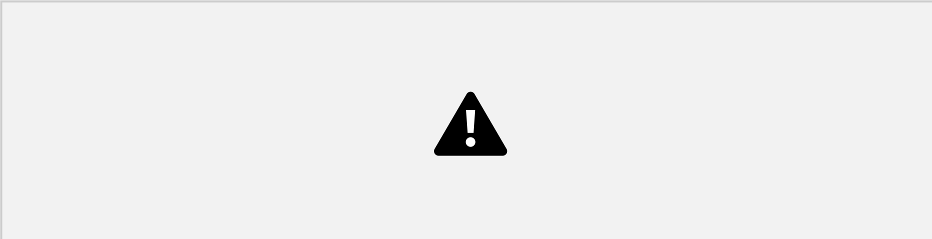
b) ¿Cómo pensáis que María representaría 236×34 (y qué resultado obtendría)?

c) Si seguimos el planteamiento de María, ¿37×23 y 23×37 dan el mismo resultado? ¿Os parece que es evidente, conforme hacéis el proceso, que darán el mismo resultado? Y 236×34 y 34×236 ¿dan el mismo resultado siguiendo el planteamiento de María?

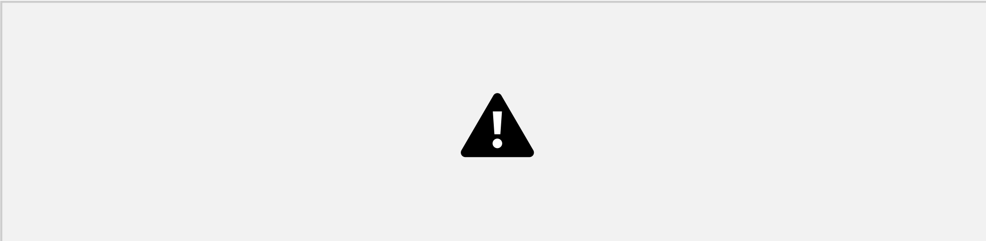
Veamos ahora otra forma divertida de reflexionar sobre la multiplicación. Trabajaremos con una máquina $1 \leftarrow 2$.

Vamos a calcular 13×3.

Así vemos el 13 en una máquina $1 \leftarrow 2$.



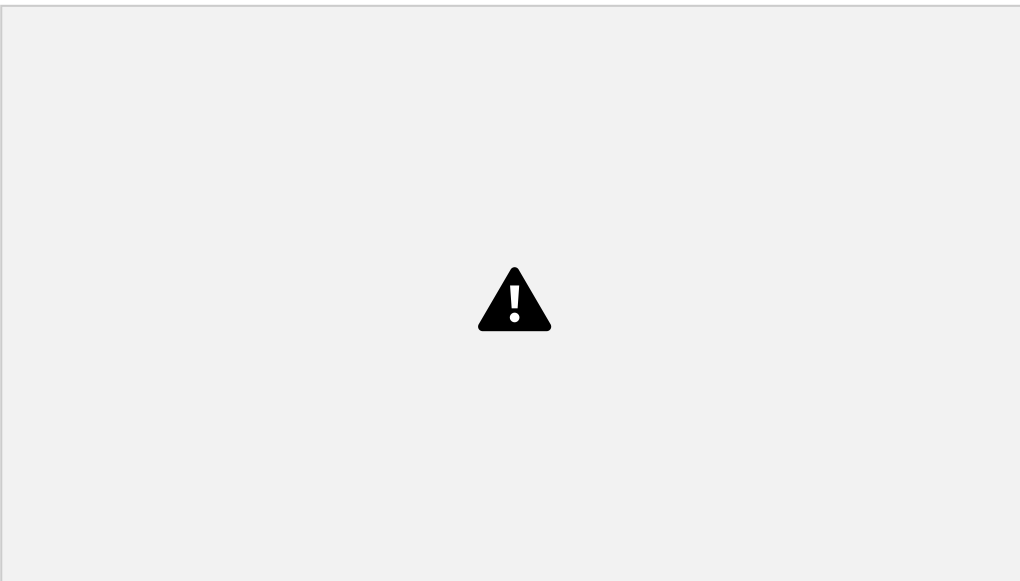
Se nos pide que lo multipliquemos todo por tres. Por tanto, cada punto que vemos tenemos que sustituirlo por tres puntos.



Y ahora hacemos algunas explosiones para obtener la solución 39 (que es 100111 en la máquina $1 \leftarrow 2$).

Por otra parte, podemos ver que tres puntos en una máquina $1 \leftarrow 2$ se representan así.

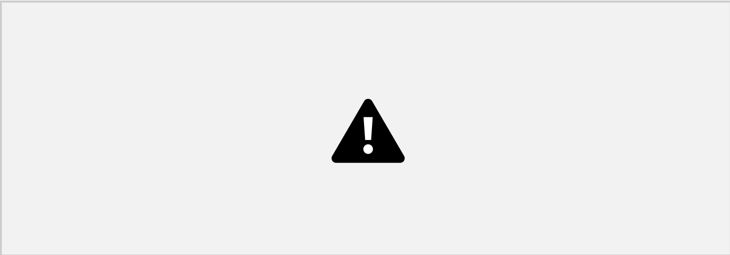
Por tanto, podemos sustituir cada punto de nuestra imagen de 13 por un punto y un segundo punto situado en la casilla de la izquierda. (He añadido un poco de color a la imagen para que se pueda seguir mejor.)



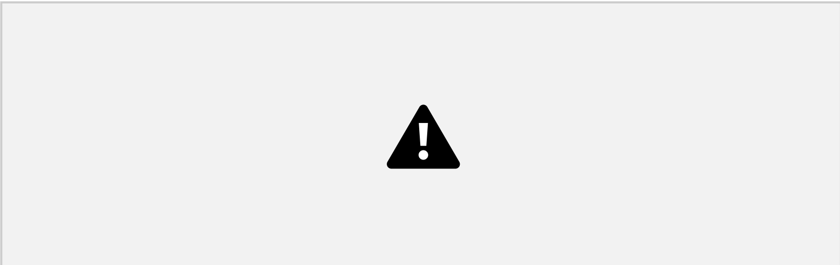
Ahora, con menos explosiones pendientes, vemos que aparece la solución 100111.

Si queremos, también podemos seguir este último planteamiento en base diez, pero puede ser ¡desagradable y molesto! (A mí, personalmente, me gusta el planteamiento de María en el ejerci cio de reflexión que hemos visto.)

Volvamos a 37×23. Así se representa el 37.



Para multiplicar por 23, tenemos que sustituir cada punto por veintitrés puntos. Pero, dado que el 23 se representa como dos puntos seguidos de tres puntos en una máquina $1 \leftarrow 10$, podemos sustituir cada punto por dos puntos y tres puntos.



Vemos el resultado $6|\ 21\ |\ 23$, que explota y da 851.

Material C: *Exploraciones brutales*

Utilizad el siguiente material para facilitarlo a aquellos alumnos que quieran reflexionar después en casa con preguntas profundas relacionadas con la experiencia. NO son deberes, es totalmente opcional, pero podría servir como fuente para futuros proyectos de los alumnos. (Existe una ver sión imprimible: *Puntos que explotan. Experiencia 3.*)

Puntos que explotan

Experiencia 3: La suma y la multiplicación

Podéis acceder a los vídeos de todas las lecciones de *Puntos que explotan* aquí: https://globalmathproject.org/exploding-dots/

Material C: *Exploraciones brutales*

Aquí tenéis algunas investigaciones sobre «grandes preguntas»: podéis explorarlas o simplemente reflexionar sobre ellas. ¡Divertíos!

EXPLORACIÓN 1: LA SUMA EN BASE DIEZ NO TIENE NADA DE ESPECIAL

Aquí tenemos una suma en una máquina $1 \leftarrow 5$ (es decir, una suma en base cinco). No es una suma en una máquina $1 \leftarrow 10$.

a) ¿Cuál es la solución de la máquina $1 \leftarrow 5$?

b) ¿Qué número tiene el código *20413* en la maquina $1 \leftarrow 5$? ¿Qué número tiene el código *13244* en la maquina $1 \leftarrow 5$? ¿Cuál es la suma de estos dos números y cuál es el código para esta suma en una máquina $1 \leftarrow 5$?

[Aquí tenéis las soluciones para que podáis comprobar vuestras

habilidades. Esta suma, como operación en una máquina $1 \leftarrow 5$, es

$$20413 + 13244 = 3 \mid 3 \mid 6 \mid 5 \mid 7 = 3 \mid 4 \mid 1 \mid 5 \mid 7 = 3 \mid 4 \mid 2 \mid 0 \mid 7 = 3 \mid 4 \mid 2 \mid 1 \mid 2 = 34212$$

En una máquina $1 \leftarrow 5$, 20413 son dos 625, cuatro 25, un 5 y tres 1, igual que el número 1358 en base diez; 13244 es el número 1074 en base diez; y 34212 es el número 2432 en base diez. Acabamos de encontrar la solución a $1358 + 1074 = 2432$.]

EXPLORACIÓN 2: LA MULTIPLICACIÓN EN BASE DIEZ NO TIENE NADA DE

ESPECIAL Trabajamos con una máquina $1 \leftarrow 3$.

a) Calculad 111×3 en base tres. Asimismo, ¿cuánto dan 1202×3 y $2002 \times$

3? ¿Podéis explicar qué veis en los resultados?

Trabajamos con una máquina $1 \leftarrow 4$.

b) ¿Cuánto da 133×4 en base cuatro? ¿Cuánto da 2011×4? ¿Cuánto da $22 \times$

4? ¿Podéis explicar qué veis?

En términos generales, ¿podéis explicar por qué, cuando trabajamos con una máquina $1 \leftarrow b$, la multiplicación de un número en base b por b da como resultado el número original con un cero añadido a su derecha?